

Математически турнир „Иван Салабашев“
29 ноември 2025 г.

Отговори и решения на задачите за 7. клас

1. Ако $a \blacklozenge b = a^2 - b^2$ и $a \star b = (a - b)^2$, на колко е равно

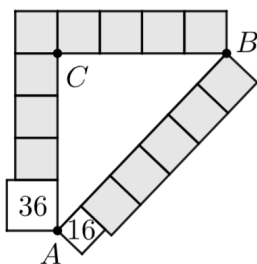
$$(99 \blacklozenge 98) \star (97 \blacklozenge 96)?$$

А) 0 Б) 4 В) 16 Г) 100

Отговор: В). Имаме

$$(99 \blacklozenge 98) \star (97 \blacklozenge 96) = (99^2 - 98^2 - (97^2 - 96^2))^2 = (99_98 - (97 + 96))^2 = 4^2 = 16.$$

2. Тринадесет еднакви сиви квадрата и два квадрата с лица 36 cm^2 и 16 cm^2 са подредени, както е показано на чертежа. Колко квадратни сантиметра е лицето на $\triangle ABC$?



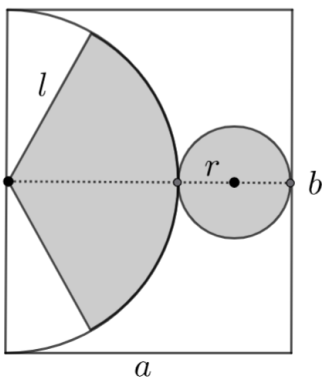
А) 180 Б) 210 В) 225 Г) 240

Отговор: Б). Ако страната на един сив квадрат е x от Питагоровата теорема имаме:

$$(4x)^2 + (3x + 6)^2 = (5x + 4)^2 \iff 36x + 36 = 40x + 16 \iff x = 5.$$

Понеже $\triangle ABC$ е правоъгълен с катети 20 cm и 21 cm, лицето му е равно на $\frac{20 \cdot 21}{2} = 210 \text{ cm}^2$.

3. На правоъгълен лист с размери a cm и b cm е начертана развивка на конус, както е показано на чертежа. Развивката на околната повърхнина на конуса е $\frac{1}{3}$ от кръг. Отношението $a : b$ е равно на:



А) 2 : 3 Б) 3 : 4 В) 3 : 5 Г) 5 : 6

Отговор: Г). Имаме

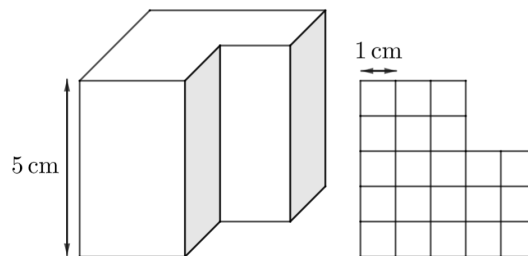
$$\frac{1}{3}2\pi\frac{b}{2} = \frac{\pi \cdot b}{3} = \pi\left(a - \frac{b}{2}\right) \iff 5b = 6a$$

4. На колко е равен сборът на най-големия прост делител на числото $a = 4^8 + 8^4$ и най-големия прост делител на $b = 12^3 + 14^3$?

А) 30 Б) 40 В) 60 Г) 144

Отговор: В). Имаме $4^8 + 8^4 = 2^{12}(2^4 + 1) = 2^{12} \cdot 17$ с най-голям прост делител равен на 17 и $12^3 + 14^3 = 2^3(6^3 + 7^3) = 2^3 \cdot 13 \cdot 43$ с най-голям прост делител равен на 43. Сборът е $17 + 43 = 60$.

5. Правата призма на чертежа е висока 5 cm, а основата ѝ, показана вдясно, се състои от квадратчета със страна 1 cm.



Всички стени на призмата са боядисани в червен цвят, след което призмата е нарязана на кубчета с ръб 1 cm. Колко от тези кубчета нямат нито една червена стена?

А) 15 Б) 18 В) 20 Г) 24

Отговор: Б). Без червена стена са всички вътрешни кубчета, които са $6 \cdot 3 = 18$.

6. Ако n -ъгълна призма и k -ъгълна пирамида имат един и същ брой стени и броят на ръбовете на пирамидата е с 25% по-малък от броя на ръбовете на призмата, колко е $n + k$?

А) 25 Б) 23 В) 17 Г) 9

Отговор: В). Имаме $n + 2 = k + 1$ и $2k = \frac{3}{4}3n$, откъдето $n = 8$ и $k = 9$, като $n + k = 17$.

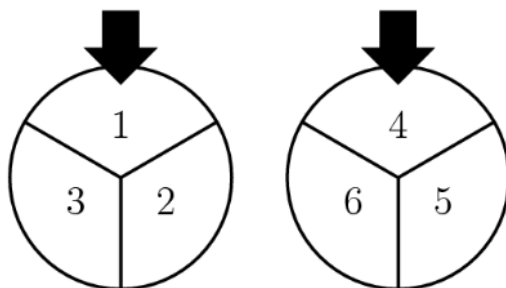
7. Един ден Дидо тръгнал от дома си към къщата на Митко. По-късно Митко тръгнал от къщи към дома на Дидо по същия път. Когато се срещнали, се оказало, че Дидо е пътувал два пъти по-дълго време от Митко и е изминал с 3 km повече от Митко.

Скоростта на Дидо е 20% по-малка от скоростта на Митко. Разстоянието между дома на Дидо и къщата на Митко е:

А) 13 km Б) 12 km В) 5 km Г) 6 km

Отговор: А). Нека времето на Митко до срещата е t h, като той е изминал x km. Ако скоростта на Дидо е v_1 , а скоростта на Митко е v_2 , имаме $v_1 = 0.8v_2$. Имаме $x + 3 = 2tv_1$ и $x = v_2t$, откъдето получаваме: $x + 3 = 2tv_1 = 2t \cdot 0.8v_2 = 1.6x \iff x = 5$. Разстоянието между двете жилища е $2x + 3 = 13$ km.

8. Двете колела на късмета се завъртат едновременно и получените числа се умножават. Каква е вероятността полученото произведение да е четно число?



- А) $\frac{1}{3}$ Б) $\frac{1}{2}$ В) $\frac{2}{3}$ Г) $\frac{7}{9}$

Отговор: Г). Вероятността произведението да е нечетно число е $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Следователно търсената вероятност е $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

9. В равнината са дадени 4 прави. Точките, през които минават поне две от дадените прави, са n на брой. Сборът от всички възможни стойности на n е равен на:

- А) 17 Б) 18 В) 19 Г) 21

Отговор: В). Възможните стойности на n са: 0, 1, 3, 4, 5, 6 и техният сбор е 19.

10. Майстор Иво може да построи един комин за 14 часа, а майстор Тео може да построи същия комин за 20 часа. Когато работят заедно, общата им производителност се увеличава с 3 тухли на час. Двамата заедно построили комина за 8 часа. Колко тухли са използвали за изграждане на комина?

- А) 700 Б) 840 В) 910 Г) 980

Отговор: Б). Нека Иво поставя по x тухли за един час, а Тео поставя по y тухли за един час. Тогава $14x = 20y = 8(x + y - 3)$ с решение $x = 60$ и $y = 42$. Общо тухлите са $60 \cdot 14 = 42 \cdot 20 = 840$.

11. Дадени са числа x , y и z , за които

$$-3 \leq x \leq 7 \quad -2 \leq y \leq 5 \quad -5 \leq z \leq 3.$$

Коя е най-голямата стойност на $|xyz - z^2|$?

Отговор: 200. Имаме $|xyz - z^2| \leq |xyz| + |z^2| \leq 7 \cdot 5 \cdot 5 + 25 = 200$. Равенство се достига при $x = 7, y = 5, z = -5$.

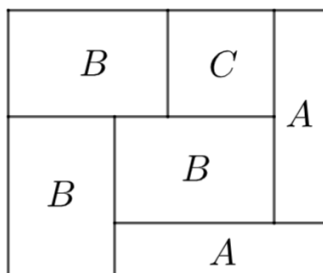
12. В шахматен турнир участвали 30 шахматисти, като всеки двама изиграли по една среща един срещу друг. Колко най-много шахматисти могат да имат точно 5 точки след завършване на турнира?

(В шаха при победа се дава 1 точка, при равен – по 0,5 точки на всеки от двамата и при загуба не се дават точки.)

Отговор: 11. Да означим търсения брой с a . Тъй като тези a шахматисти са изиграли $\frac{a(a-1)}{2}$

срещи помежду си и всяка среща дава една точка, то $\frac{a(a-1)}{2} \leq 5a \iff a \leq 11$. Такъв турнир съществува, достатъчно е 11 участника да са завършили наравно помежду си и да са загубили всички останали срещи.

13. Правоъгълникът на чертежа е разделен на два еднакви правоъгълника, означени с A , три еднакви правоъгълника, означени с B и един квадрат, означен с C .



Ако по-малката страна на правоъгълника е 10 см, колко сантиметра е по-дългата му страна?

Отговор: 12. Ако x и y са дължината и широчината на A , а a и b са дължината и широчината на B , то квадратът има страна b . Освен това $a = b + y$, $x = a + y$ и $x + y = a + b$. От последните две получаваме $b = 2y$, откъдето $a = 3y$ и $x = 4y$. Страните на големия правоъгълник са $5y$ и $6y$ и от условието имаме $5y = 10 \iff y = 5$, т.е. търсената страна е 12 см.

14. Дадени са три четирицифрени числа a , b и c , като $a + b = c$. Известно е, че дванадесетте цифри на тези числа са

1, 1, 2, 2, 3, 3, 6, 6, 7, 7, 8, 8.

Да се намери най-голямата възможна стойност на c .

Отговор: $1386 + 7326 = 8712$.

15. Иван записал две числа в клетките на таблица 3×3 , както е показано на фигурата. По колко различни начина Петър

2		
5		

може да запише по едно естествено число в останалите клетки на таблицата така, че да получи магически квадрат (сборът на числата във всеки ред, всяка колона и във всеки от двата диагонала да е един и същ)?

Отговор: 2. Да означим числото в средната клетка с x . Известно е, че в магически квадрат сборът е равен на $3x$. Получаваме квадрата:

$3x - 7$	$12 - 2x$	$2x - 5$
2	x	$2x - 2$
5	$4x - 12$	$7 - x$

Има само две стойности на x , за които всички числа са естествени: $x = 4$ и $x = 5$.