

Математически турнир „Иван Салабашев“, 2022 г.

Решения на задачите от темата за 8-9. клас

1. Броят на различните реални корени на уравнението $(x + 5)^2 + 8 = 3|3x + 15|$ е:
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Отговор: Г) Полагайки $|x + 5| = t$, получаваме $t^2 - 9t + 8 = 0$ с решения $t_1 = 1$ и $t_2 = 8$. Тъй като и двата корена са положителни, на всеки от тях ще съответстват по две различни стойности за x и значи имаме $2 \cdot 2 = 4$ различни реални решения.

2. Най-малкото естествено число n , за което 84^n се дели на 98784 е:
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

Отговор: Б) Непосредствено се проверява, че $98784 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^3$, докато $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Следователно търсеното най-малко число е $\lceil \max \{5/2, 2/1, 3/1\} \rceil = 3$.

3. Вероятността след четири хвърляния на стандартен зар произведението на четирите паднали се числа да се дели на 3 е:
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{8}{27}$ D) $\frac{65}{81}$

Отговор: Г) Тъй като измежду числата $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ две се делят на 3, а четири – не, то вероятността на всяко хвърляне да се падне число, неделящо се на 3 е $2/3$. Следователно, вероятността след четири хвърляния полученото произведение да не се дели на три е $(2/3)^4$, откъдето за търсената вероятност остава допълнението

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{81 - 16}{81} = \frac{65}{81}.$$

4. В едно училище от 60 ученика, $2/3$ от момчетата и $1/3$ от момичетата искат да ходят на планина, а останалите – в музей. Ако желаещите за планина са с 40% повече от тези за музей, то пропорцията момчета към момичета в училището е:

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

Отговор: Б) Да означим търсената пропорция с k , а броя момичета – с x . Тогава момчетата са kx , като $kx + x = (k + 1)x = 60$. По условие имаме, че

$$\frac{\frac{2}{3}kx + \frac{1}{3}x}{\frac{1}{3}kx + \frac{2}{3}x} = \frac{140}{100} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{2k + 1}{k + 2} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 10k + 5 = 7k + 14 \Leftrightarrow 3k = 9,$$

и значи $k = 3$. Проверка, че в този случай броя момичета е цяло число: $x = 60/(3 + 1) = 15$.

5. В триъгълник ABC точките D и E са избрани съответно върху страните BC и AC така, че $BD = DE = EA$. Ако правите AD и BE се пресичат в точка F и $\angle AFB - \angle ACB = 69^\circ$, то $\angle ACB$ е равен на:

- A) 42° B) 44° C) 46° D) 48°

Отговор: А) Триъгълници ADE и EBD са равнобедрени и значи $\angle DAE = \angle EDA = x$, а $\angle DBE = \angle BED = y$. Да означим $\angle ACB$ с γ . Тоагава, за триъгълник EDC имаме, че

$\angle CED = \angle DAE + \angle EDA = 2x$ и $\angle CDE = \angle DBE + \angle BED = 2y$, т.e., $\gamma = 180 - 2x - 2y$. Следователно $\angle AFB = \angle DFE = 180 - \angle EDA - \angle BED = 180 - x - y = 90 + \gamma/2$. Накрая,

$$69 = \angle AFB - \angle ACB = 90 + \gamma/2 - \gamma = 90 - \gamma/2 \implies \gamma = 2 \cdot (90 - 69) = 2 \cdot 21 = 42^\circ.$$

6. Ако за простите числа p, q, r е в сила $p + q^2 = r^4$, то стойността на израза $\frac{p+q}{r}$ е:
- A) 8 B) 6 C) 4 D) 5

Отговор: Г) От $p = r^4 - q^2 = (r^2 - q)(r^2 + q)$ следва, че $r^2 - q = 1$ и $r^2 + q = p$. Аналогично, от $r^2 - q = 1$ следва, че $r - 1 = 1$ и $r + 1 = q$. Оттук, $r = 2$, $q = 3$, $p = 7$.

7. 3 момчета и 3 момичета ги изпитали един по един в час по математика, като предварително всеки ученик си изтеглил различен номер от 1 до 6, отговарящ на реда му на изпитване. Каква е вероятността в нито един момент от часа да не са били изпитани повече момичета, отколкото момчета?

- A) 25% B) 20% C) 10% D) 40%

Отговор: А) Всички възможни наредби на учениците са $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$, докато всички наредби, не удовлетворяващи условието са $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$. Оттук търсената вероятност е $\frac{20 - 15}{20} = \frac{1}{4} = 25\%$. Друго възможно решение на втората част е, ако означим момчетата с нули, а момичетата с единици и директно преброим кои са 5-те добри конфигурации, а именно: {010101, 010011, 001101, 001011, 000111}.

8. Докато събирал естествените числа a и b , Емил се разсеял и забравил да запише цифрата на единиците на a , която била седмица. В резултат получил 2022. Ако вместо цифрата на единиците на a , Емил беше забравил да запише цифрата на единиците на b , то той щеше да получи сбор 5000. Сумата $a + b$ е равна на:

- A) 6345 B) 6365 C) 6385 D) 6405

Отговор: В) Ако означим $a = 10x + 7$ и $b = 10y + d$, където $0 \leq d \leq 9$ е цифрата на единиците на b , използвайки условието на задачата получаваме системата линейни уравнения

$$\begin{cases} x + 10y + d = 2022 \\ y + 10x + 7 = 5000 \end{cases} \implies 9(x - y) - d = 2971.$$

От $2971 \equiv 1 \pmod{9}$ получаваме, че $d = 8$. Събирайки двете уравнения получаваме $11(x + y) + 15 = 7022$, откъдето $x + y = 637$. Окончателно $a + b = 10(x + y) + 15 = 7022 - 637 = 6385$.

9. Квадратна дъска 3×3 е запълнена по случаен начин с числата от 1 до 9, като всяко число е използвано точно по веднъж. Едно запълване ще наричаме *редномерно*, ако сумите от числата по редове са едни и същи. Броят на различните редномерни запълвания е:

- A) $2^5 \cdot 3^4$ B) $2^4 \cdot 3^5$ C) $2^4 \cdot 3^3$ D) $2^3 \cdot 3^2$

Отговор: А) Тъй като $1 + 2 + \dots + 9 = 45$, то сумата на всеки ред в едно редномерно запълване трябва да е 15. Да разгледаме реда, в който участва единицата. Там единствените възможности са {1, 6, 8} и {1, 5, 9}. Аналогично за реда на двойката имаме единствено възможностите {2, 6, 7}, {2, 5, 8} и {2, 4, 9}. Ако за реда на единицата имаме {1, 6, 8}, то тъй като вече 6-цата и 8-цата са

заети, за реда на двойката остава единствено $\{2, 4, 9\}$. Аналогично, ако за реда на единицата имаме $\{1, 5, 9\}$, то за реда на двойката остава единствено $\{2, 6, 8\}$. Ясно е, че ако сумите на два от редовете на таблицата са 15, то такава ще бъде и за третия ред. Така, с точност до пермутации по редове или по стълбове, получихме само две възможности за тройките елементи по редове. Оттук и всичките редномерни запълвания са $3!^4 \cdot 2 = 2^5 \cdot 3^4$ (независими пермутации по всяка от колоните и пермутации по целите редове).

- 10.** Даден е $\triangle ABC$, за който $\frac{\angle BAC + \angle CBA}{\angle ACB} = x$ и $\frac{\angle CBA + \angle ACB}{\angle BAC} = y$. Ако $x + y = 6$, а $xy = 3$, то на колко е равен $\angle CBA$?

A) 60° B) 45° C) 36° D) 30°

Отговор: B) Да използваме стандартните означения за ъглите в триъгълник: $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. От $\frac{\alpha + \beta}{\gamma} = x$ и $\alpha + \beta + \gamma = 180$ получаваме, че

$$x = \frac{\alpha + \beta}{\gamma} = \frac{180 - \gamma}{\gamma} \implies \gamma = \frac{180}{x + 1}.$$

Аналогично $\alpha = \frac{180}{y + 1}$. Оттук

$$\beta = 180 - \gamma - \alpha = 180 \left[1 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} \right] = \frac{180(xy-1)}{xy+x+y+1} = \frac{180 \cdot 2}{10} = 36^\circ.$$

- 11.** Даден е квадратния тричлен $f(x) = x^2 + ax + 2022$, където a е реален параметър. Да се пресметне стойността на израза $f(101) - 2f(100) + f(99)$.

Отговор: 2 Да разгледаме по-общата задача $f(y+1) - 2f(y) + f(y-1)$, където $f(x) = ux^2 + vx + w$. Имаме, че

$$f(y+1) - 2f(y) + f(y-1) = [f(y+1) - f(y)] - [f(y) - f(y-1)] = [(2y+1)u + v] - [(2y-1)u + v] = 2u.$$

- 12.** Разполагаме с честна монета, при която хвърлянето на ези или тура е равновероятно. Каква е вероятността в проценти след седем хвърляния езитата да са повече от турите?

Отговор: 50 Нека си мислим, че хвърляме монетата върху стъклена маса. Ние следим какво се случва върху масата, а Емил - какво се случва под нея. Така, на всяка последователност от 7 хвърляния върху масата съпоставяме уникална последователност от огледалните ѝ образи. Във всяка двойка истинска-огледална последователност точно една от тях изпълнява условието, така че вероятността е $1/2$, което е 50%.

- 13.** Окръжност с радиус 20 см и квадрат с разположени в равнината така, че окръжността се допира до една от страните на квадрата и минава през два от върховете му. На колко саниметра е равна дължината на страната на квадрата?

Отговор: 32 Нека квадратът е с върхове $ABCD$ и окръжността да допира страната CD в точка M . Тогава, окръжността трябва да минава през върховете A и B , откъдето центърът ѝ O ще лежи върху симетралата на AB и значи M е среда на CD . Да означим дължината на страната на квадрата с x , а средата на AB - с N . От Питагорова теорема за триъгълник AON

имаме, че $AO^2 = AN^2 + NO^2$ и $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MO}$, т.e., $|NO| = ||MN| \pm |MO||$. Изразявайки съответните отсечки чрез x , получаваме

$$20^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (x \pm 20)^2 = \frac{5x^2}{4} \pm 40x + 8^2 \implies x^2 \pm 32x = 0.$$

Тъй като $x > 0$, то $|NO| = |MN| - |MO|$ (центърът O е вътрешен за квадрата) и $x = 32$.

14. Трицифрен код ще наричаме всяка последователност от три цифри abc . Ще казваме, че един трицифрен код *доминира* друг, ако цифрата на всяка от трите позиции в първия код е не по-малка от тази във втория. В колко най-малко цвята можем да боядисаме всички трицифрени кодове така, че никой код да не е едноцветен с никой от доминиращите го?

Отговор: 28 Нека означим минималния брой необходими цвята с n . Доминиращата верига

$$999 \prec 998 \prec 997 \prec \dots \prec 990 \prec 980 \dots \prec 900 \prec 800 \prec \dots \prec 000$$

съдържа 28 кода и значи $n \geq 28$. От друга страна, ако на всеки код abc съпоставим сумата от цифрите му $a + b + c$, то получаваме точно 28 възможни различни суми. Тъй като няма как два различни кода с еднаква сума на цифрите да се доминират, то ако използваме различен цвят за всяка от сумите имаме работещо оцветяване, т.e., $n \leq 28$.

15. Да се намери най-голямото естествено число n , за което $n! + 5$ е точна степен (по-голяма от първа!) на естествено число.

Отговор: 5 Нека $n! + 5 = q^\alpha$, където $q, \alpha \in \mathbb{N}$ и $\alpha \geq 2$. Директно се проверява, че $5! + 5 = 125 = 5^3$ и значи $n \geq 5$. Следователно $5 \mid q$. Но при $n \geq 10$ имаме, че $5^2 \mid n!$, значи $5 \mid q^\alpha$, а $5^2 \nmid q^\alpha$ откъдето $\alpha = 1$ – противоречие. Следователно $n \leq 9$. Аналогично, за $6 \leq n \leq 9$ и $\alpha \geq 2$ трябва $5^2 \mid q^\alpha$, т.e., $n!/5 \equiv -1 \pmod{5} \equiv 4! \pmod{5}$. Последното сравнение идва от теоремата на Уилсън. Следователно $n!/5! \equiv 1 \pmod{5}$, което е в сила само при $n = \{6, 8\}$. Тъй като

$$6! + 5 = 6(5! + 5) - 25 = 6 \cdot 5^3 - 5^2 = (6 \cdot 5 - 1) \cdot 5^2 = 29 \cdot 5^2,$$

а 29 е просто число, то $n = 6$ не е решение. Аналогично, $8! + 5 = 1613 \cdot 5^2$ и 1613 отново е просто число, т.e., $n = 8$ не е решение.

Задачите от темата за осми-девети клас са предложени от Станислав Харизанов.