

# Математически турнир „Иван Салабашев“, 2022 г.

## Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Ако диаметърът на цилиндър е увеличен с 25%, то с колко процента трябва да се намали височината му, така че обемът му да не се промени?

- A) 10      B) 25      C) 36      D) 50

**Отговор:** B) Радиусът става  $\frac{5}{4}$  от първоначалния, следователно лицето на основата става  $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$  от първоначалното. За да се запази обемът, височината трябва да е  $\frac{16}{25}$  от първоначалната, което е 36 процента намаление.

2. Числената стойност на израза  $A = \frac{49}{64} + 7a + 16a^2$  при  $a = \frac{1}{32}$  е:

- A)  $\frac{1}{16}$       B) 1      C)  $\frac{1}{8}$       D) 4

**Отговор:** B) Имаме  $A = \left(\frac{7}{8} + 4a\right)^2 = \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\right)^2 = 1$ .

3. Каква е най-голямата стойност на израза  $\frac{x+y}{x}$ , ако  $-4 \leq x \leq -2$  и  $2 \leq y \leq 4$ ?

- A)  $-\frac{1}{2}$       B) -1      C)  $\frac{1}{2}$       D) 0

**Отговор:** B) Имаме  $\frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$  и тъй като  $\frac{y}{x} < 0$ , то  $\frac{y}{x}$  е максимално, когато  $\frac{|y|}{|x|}$  е минимално. Следователно  $y = 2$ ,  $x = -4$  и  $\frac{x+y}{x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

4. Емил и Сашо бягат по кръгла писта в противоположни посоки, стартирайки от диаметрално противоположни точки като се движат с постоянни скорости. Те се срещат за първи път, след като Сашо е изминал 100 метра. Следващата им среща е след като Емил изминал 150 метра след мястото на първата им среща. Дължината на пистата в метри е:

- A) 350      B) 300      C) 250      D) 400

**Отговор:** A) Нека  $x$  е дължината на пистата. До първата среща Сашо е изминал 100 метра, а Емил  $\frac{x}{2} - 100$  метра. После Емил изминава 150 метра, а Сашо  $x - 150$  метра. Понеже се движат с постоянни скорости, то

$$\frac{100}{\frac{x}{2} - 100} = \frac{x - 150}{150}, \text{ откъдето след проверка с отговорите получаваме } x = 350.$$

5. Нека  $O$  е вътрешна точка за изпъкналия четириъгълник  $ABCD$  и разстоянията от точка  $O$  до върховете на четириъгълника са 1 см, 2 см, 4 см и 7 см в някакъв ред. Каква е най-голямата възможна стойност на лицето на  $ABCD$  в квадратни сантиметри?

- A) 45      B) 26      C) 48      D) 24

**Отговор:** Г) По дадени диагонали на изпъкнал четириъгълник лицето му е най-голямо, когато теса перпендикуляри. Следователно можем да считаме, че  $AC$  и  $BD$  се пресичат в  $O$  и са перпендикуляри. Разделяме 1, 2, 4 и 7 на две двойки и търсим максимума на произведението.

Тъй като  $(1+2)(4+7) = 33 < (1+4)(2+7) = 45 < (1+7)(2+4) = 48$ , то най-голямата възможна лице е  $24 \text{ cm}^2$ .

**6.** Намерете броят на естествените числа  $a$ ,  $1 \leq a \leq 100$ , за които съществува естествено число  $b$ , за което

$$5a^2 - 4ab - 2a + b^2 + 1$$

се дели на 11.

- A) 10      B) 15      C) 9      D) 11

**Отговор:** A) Имаме  $5a^2 - 4ab - 2a + b^2 + 1 = (2a - b)^2 + (a - 1)^2$ . Сбор на квадратите на две цели числа се дели на 11 когато и двете числа се делят на 11. Следователно търсените числа са точно тези, които дават остатък 1 при деление с 11. Броят не тези числа между 1 и 100 е 10.

**7.** Намерете сборът от коефициентите пред нечетните степени на  $x$  в нормалния вид на многочлена

$$f(x) = (2x + 3)^3 - (4x + 1)^3.$$

- A) 27      B) -14      C) -26      D) 14

**Отговор:** B) Известно е, че търсената стойност е  $\frac{f(1) - f(-1)}{2} = -14$ , тъй като  $f(1) = 0$  и  $f(-1) = 28$ .

**8.** Нека  $S$  е множеството от първите 2005 естествени числа, които се делят на 4, а  $T$  е множеството от първите 2005 естествени числа, които се делят на 6. Колко на брой са числата, които са едновременно в  $S$  и в  $T$ ?

- A) 1001      B) 500      C) 333      D) 668

**Отговор:** Г) Тъй като  $\text{НОК}(4, 6) = 12$ , то общите елементи за  $S$  и  $T$  са кратните на 12. Имаме  $4 \cdot 2005 = 8020$  и  $6 \cdot 2005 = 12030$ . Ясно е, че някои кратни на 12 от  $T$  няма да са в  $S$ , но всички кратни на 12 от  $S$  са в  $T$ . Тъй като  $4 \cdot 3 = 12$ , то всеки трети елемент на  $S$  се дели на 12, т.e. имаме  $\left[ \frac{2005}{3} \right] = 668$  числа.

**9.** В  $\triangle ABC$  имаме  $AB = 25$  и  $AC = 42$ . Точки  $D$  и  $E$  са съответно върху страните  $AB$  и  $AC$ , като  $AD = 19$  и  $AE = 14$ . Отношението на лицата на  $\triangle ADE$  и четириъгълника  $BCED$  е:

- A)  $\frac{266}{1521}$       B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{19}{56}$       D) 1

**Отговор:** B) Имаме  $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ADE}}{S_{ABE}} \cdot \frac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{19}{25} \cdot \frac{14}{42} = \frac{19}{75}$ , и следователно  $\frac{S_{ADE}}{S_{BCED}} = \frac{S_{ADE}}{S_{ABC} - S_{ADE}} = \frac{1}{\frac{75}{19} - 1} = \frac{19}{56}$ .

**10.** Колко от числата  $1, 2, 3, 4, \dots, 10000$  съдържат в записа си точно две съседни цифри, равни на 9? (Числата 993 и 1992 са от търсения вид, докато 9295 и 1999 не са.)

- A) 280      B) 300      C) 268      D) 261

**Отговор:** Г) Считаме, че всички числата са четирицифрени, като могат да започват с нула. Имаме  $9 \cdot 10 = 90$  числа от вида  $\overline{99ab}$ ,  $9 \cdot 9 = 81$  числа от вида  $\overline{a99b}$  и  $10 \cdot 9 = 90$  числа от вида  $\overline{ab99}$ , общо  $90 + 81 + 90 = 261$  числа.

**11.** Да се намери броя на всички естествени числа  $n$ ,  $4 \leq n \leq 100$ , за които съществува квадратна таблица  $n \times n$ , в чиито клетки могат да се запишат цели числа така, че сборът на числата

във всеки квадрат  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$  е четно число, но сборът на числата в цялата таблица да е нечетно число.

**Отговор: 32** Ясно е, че  $n$  не се дели на 2 или 3, защото в противен случай можем да разбием таблицата на квадрати  $2 \times 2$  или  $3 \times 3$  и сумата от числата в таблицата ще е четно число, противоречие. Ако  $n = 6k + 1$  или  $n = 6k + 5$ , попълваме първия стълб с единици, втория с нули, третия с единици, четвъртия също с единици, петия с нули, шестия с единици. И след това повтаряме тази последователност до края на таблицата. Директно се проверява, че всеки квадрат  $2 \times 2$  или  $3 \times 3$  има четен брой единици, а сборът от всички числа е нечетен.

При  $4 \leq n \leq 100$  числата от вида  $6k + 1$  или  $6k + 5$  са по 16, следователно имаме 32 такива числа.

**12.** На дъската са записани дробите  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{10}$ . За един ход Иван избира две от записаните на дъската числа  $x$  и  $y$ , изтрива ги и на тяхно място записва числото  $\frac{xy}{x+y}$ . След девет хода на дъската останало само едно число. Ако  $s$  е сборът от всички възможни стойности на това число, да се намери  $220s$ .

**Отговор: 4** Тъй като  $\frac{\frac{1}{xy}}{x+y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ , то сумата от реципрочните стойности на числата не се променя. В началото тя е  $1 + 2 + \dots + 10 = 55$  и значи последното число е винаги  $\frac{1}{55}$ . Тогава  $\frac{220}{55} = 4$ .

**13.** Ангел и Боби са на разстояние 20 km един от друг. Те тръгват на велосипеди едновременно един срещу друг, движат се с постоянни скорости, като скоростта на Ангел е три пъти по-голяма от тази на Боби. Разстоянието между двамата намалява с 1 километър всяка минута. След 5 мин. Ангел спрял и изчакал Боби да пристигне при него. След колко минути след като са започнали да се движат един срещу друг, Боби ще пристигне при него?

**Отговор: 65** Ако  $v_1$  и  $v_2$  са съответно скоростите на Ангел и Боби, то  $v_1 = 3v_2$ . Понеже 1 километър в минута е 60 километра в час,  $v_1 + v_2 = 60$  и следователно  $v_1 = 45 \text{ km/h}$ ,  $v_2 = 15 \text{ km/h}$ . След 5 минути разстоянието между тях ще бъде  $20 - 5 = 15$  километра. Следователно Боби ще зостигне Ангел точно 1 час след като Ангел е спрял, т.e.  $5+65 = 65$  минути от началото.

**14.** Нека  $p$ ,  $q$  и  $r$  са прости числа, за които  $p^q + 1 = r$ . Намерете сумата  $p + q + r$ .

**Отговор: 9** Тъй като  $p \geq 2$  и  $q \geq 2$ , то  $r \geq 5$  и  $r$  е нечетно число, следователно  $p^q$  е четно, т.e.  $p$  е четно и значи  $p = 2$ . Ако  $q > 2$ , то  $q$  е нечетно и тогава  $p^q + 1 = 2^q + 1$  се дели на 3, т.e.  $r = 3$ , противоречие. Следователно  $q = 2$  и оттам  $r = 5$ , откъдето получаваме  $p + q + r = 2 + 2 + 5 = 9$ .

**15.** Дадена е таблица с 2 реда и 2022 стълба. Едно оцветяване на клетките в син, зелен или жълт цвят (всяка клетка се оцветява в един цвят) се нарича *добро*, ако всеки две клетки, които имат обща страна са разноцветни. Нека  $B$  е броят на всички добри оцветявания. Каква е максималната степен на числото 3, която дели  $B$ ?

**Отговор: 2022** Да започнем оцветяването от най-десния стълб. Клетката в горния ред може да се оцвети по три начина, тази във втория по два начина. Директно се проверява, че втория стълб може да се оцвети по 3 начина, което е вярно и за всички останали стълбове. Следователно имаме  $6 \cdot 3^{2021} = 2 \cdot 3^{2022}$  възможни оцветявания.

**Задачите от темата за седми клас са предложени от Александър Иванов.**