

Математически турнир „Иван Салабашев“, 2022 г.

Решения на задачите от темата за 10-12 клас

Задача 1. Да се реши в цели числа уравнението

$$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{3}{y^2} = \frac{1}{4}.$$

Решение. След привеждане под общ знаменател и групиране достигаме до уравнението

$$(y^2 - 12)x^2 - 8yx - 4y^2 = 0,$$

откъдето (понеже $y^2 \neq 12$)

$$x = \frac{2y(2 \pm \sqrt{y^2 - 8})}{y^2 - 12}.$$

Тъй като $x, y \in \mathbb{Z}$, то лесно се вижда, че $y^2 = 9$ и значи всички целочисленi решения (x, y) са $(-2, 3)$, $(-6, 3)$, $(2, -3)$ и $(6, -3)$.

Оценяване. 2 т. за достигане до квадратно уравнение за x , 1 т. за решаването му и 4 т. за намиране на всички целочисленi решения.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$, за който $\not\propto ACB = 90^\circ$. Точки A_1, B_1, C_1 съответно върху страните BC, CA, AB са такива, че $\not\propto A_1B_1C_1 = 90^\circ \geq \not\propto AC_1B_1$. Кога лицето на $\triangle A_1B_1C_1$ е максимално?

Решение. Нека $A'_1 \in BC$, $C'_1 \in AB$, $D \in A_1B_1$ така, че $A'_1B_1 \parallel AB \perp B_1C'_1$ и $A'_1D \perp A_1B_1$. Понеже $\triangle B_1C'_1C_1 \sim \triangle B_1DA'_1$, то $\frac{B_1C'_1}{B_1C_1} = \frac{B_1D}{B_1A'_1}$, т.e. $B_1A'_1 \cdot B_1C'_1 = B_1D \cdot B_1C_1$. Тъй като $\not\propto AC_1B_1 \leq 90^\circ$, то $A_1 \in [A'_1C]$, т.e. $B_1D \geq B_1A_1$ и значи $S' = S_{A'_1B_1C'_1} \geq S_1 = S_{A_1B_1C_1}$.

По-нататък, от $\triangle B_1C'_1A \sim \triangle A'_1CB_1$ следва, че $\frac{B_1C'_1}{B_1A} = \frac{A'_1C}{A'_1B_1}$, т.e. $2S' = A'_1C \cdot AB_1$. Като положим $x = \frac{CA'_1}{CB} = \frac{CB_1}{CA}$ и $S = S_{ABC}$, получаваме, че $S' = Sx(1-x) \leq S/4$.

И така, $S_1 \leq S/4$, като равенство се достига, когато A'_1B_1 е средна отсечка и $A_1 = D$. Последното означава, че $A_1 = A'_1$ или $A_1 = C$. Следователно S_1 е максимално, когато A_1B_1 или B_1C_1 са средни отсечки.

Оценяване. По 2 т. за $S_1 \leq S'$ и $S' \leq S/4$, и 3 т. за краен отговор.

Забележка. Задачата следва и от известната задача в даден триъгълник да се разположи успоредник с максимално лице.

Задача 3. Нека P е такъв полином с неотрицателни цели коефициенти, че $P(n) = 14n^{10} + 6$ за някое $n \in \mathbb{N}$. Да се намерят всички такива P , за които числото $P(1)$ е възможно най-малко.

Решение. При $n = 1$ имаме, че $P(1) = 20$. Нека $n > 1$. Ако някой коефициент на P , например пред x^k е поне n , то полиномът $Q(x) = P(x) + x^{k+1} - nx^k$ е с неотрицателни цели коефициенти, $Q(n) = P(n)$ и $Q(1) = P(1) + 1 - n < P(1)$. Продължавайки по този начин, накрая можем да считаме, че коефициентите на P са по-малки от n . Ако $n > 14$, от еднозначността на представянето на естествените числа в n -ична бройна система, следва, че $P(x) = 14x^{10} + 6$ и значи $P(1) = 20$. При $n \leq 14$ намираме P , като представим 14 и 6 в n -ична бройна система. Непосредствена проверка показва, че числото $P(1)$ е възможно най-малко при $n = 2$ и $n = 6$; $14 = 1110_{(2)}$, $6 = (110)_{(2)}$, $P(x) = (x^3 + x^2 + x)x^{10} + (x^2 + x)$ и $14 = 22_{(6)}$, $6 = (10)_{(6)}$, $P(x) = (2x + 2)x^{10} + x$; $P(n) = 14n^{10} + 6$ съответно при $n = 2$ и $n = 6$, като и в двата случая $P(1) = 5$, а $P(1) > 5$ в останалите случаи.

Оценяване. 3 т. за случая $n > 14$ и 4 т. за случая $n \leq 14$.

Забележка. Задачата е подобна на Задача 6 от темата за 10-12 клас от МТ “Иван Салабашев” през 2012 г.

Задачите от темата за 10.-12. клас са предложени от Николай Николов.