

Математически турнир „Иван Салабашев“
29 ноември 2025 г.

Отговори и решения на задачите за 8-9. клас

1. Изразът $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$ е равен на:

- А) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ Б) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ В) $\sqrt{7} - 1$ Г) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

Отговор: Б).

2. Колко най-много числа можем да изберем от множеството $\{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$, така че сборът на кои да е две числа от избраните (не непременно различни) да не е равен на друго число от избраните?

- А) 8 Б) 9 В) 10 Г) 11

Отговор: В). Ако изберем всички нечетни числа, сборът на всеки две е четно число и не може да бъде равен на друго число от избраните. Нека k е най-голямото от избраните числа. От всяка от двойките $(1, k-1), (2, k-2), \dots, \left(\left[\frac{k}{2}\right], \left[\frac{k}{2}\right]\right)$ най-много едно число може да бъде между избраните.

3. Нека

$$f(n) = n^2 - 6n + 8 \text{ и } g(n) = n^2 - 7n + 12.$$

Колко са целите стойности на n , за които $\frac{f(n)}{g(n)}$ е също цяло число?

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

Отговор: Б). Имаме:

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{(n-2)(n-4)}{(n-3)(n-4)}.$$

За да бъде това число цяло трябва $\frac{n-2}{n-3}$ да е цяло, като $\neq 4$. Това е възможно само при $n = 2$.

4. Даден е триъгълник ABC , за който

$$AB = 10 \text{ cm}, BC = 20 \text{ cm}.$$

Точка N от страната BC е такава, че $BN = 5$ cm. Ако M е средата на AC и $\angle MNC = 60^\circ$, то дължината на отсечката MN е равна на:

- А) 5 cm Б) 8 cm В) 12 cm Г) 4 cm

Отговор: А). Ако P е средата на BC , то $MP = 5$ cm и $PN = 5$ cm. Тогава $\triangle MNP$ е равностранен и $MN = 5$ cm.

5. Най-голямото цяло число, което е по-малко или равно на числото

$$\frac{3^{100} + 2^{100}}{3^{96} + 2^{96}}$$

е равно на:

А) 81

Б) 80

В) 97

Г) 625

Отговор: Б). Директно се доказва, че

$$80 < \frac{3^{100} + 2^{100}}{3^{96} + 2^{96}} < 81.$$

6. Броят на неотрицателните цели числа, които могат да се представят във вида

$$a_5 \cdot 3^5 + a_4 \cdot 3^4 + \dots + a_1 \cdot 3^1 + a_0,$$

където $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ за $0 \leq i \leq 5$ е равен на:

А) 365

Б) 370

В) 381

Г) 400

Отговор: А). Числото 0 може да се представи по този начин при $a_i = 0$ за всяко i . За да бъде такова число положително е необходимо и достатъчно за най-голямото i , за което $a_i \neq 0$ да имаме $a_i = 1$. При $a_5 = 1$ имаме 3^5 числа; при $a_5 = 0, a_4 = 1$ имаме 3^4 числа и т.н. Общо числата са

$$1 + 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = 1 + \frac{3^6 - 1}{2} = 365.$$

7. Седем стандартни зара се хвърлят едновременно. Вероятността сумата на падналите се точки да е 13 е записана във вида $\frac{n}{6^7}$. Колко е n ?

А) 824

Б) 917

В) 924

Г) 856

Отговор: Б). Броят на начините, по които можем да представим 13 като сбор на 7 естествени числа е $\binom{12}{6} = 924$. В такова представяне не може да има число, по-голямо от 7. Тези със едно число 7 са 7 на брой (една седмица и 6 единици). Остават 917 възможности.

8. На колко е равен сборът от ирационалните корени на уравнението

$$(x^2 + 5x - 6)(x^2 - x - 1) = 0 ?$$

А) 0

Б) 1

В) -4

Г) -5

Отговор: Б). Само второто уравнение има ирационални корени и от формуите на Виет $x_1 + x_2 = 1$.

9. Сумата от цифрите на естественото число n е 1274. Кое от дадените числа може да бъде сумата от цифрите на $n + 1$?

А) 12

Б) 3

В) 1265

Г) 1239

Отговор: Г). Ако n завършва на точно k деветки, то $S(n + 1) = S(n) + 1 - 9k$. Следователно $S(n + 1) = 1275 - 9k$ и дава остатък 6 при деление на 9. От отговорите само 1239 дава остатък 6 при деление на 9.

10. На дъската са записани числата

$$1, 2, 3, \dots, 56, 57.$$

Колко най-много от тези числа можем да изберем, така че частното на никой две от избраните числа не е равно на 2, 5?

А) 45

Б) 48

В) 50

Г) 52

Отговор: Б). Да разгледаме редичките от числа, за които всяко число е 2,5 по предишното. Това са 2, 5; 4, 10, 25; 6, 15; 8, 20, 50; 12, 30; 14, 35; 16, 40; 18, 45; 22, 55. Ясно е, че от всяка редичка трябва да има поне едно неизбрано число. Ако изберем всички числа без по едно от всяка от горните редички (за тези с три числа не избираме средното), то ще получим $57 - 9 = 48$ числа.

11. Да се намери най-малкото естествено число $N > 9$, което не се дели на 7, но ако заменим коя да е цифра на N с цифрата 7, то полученото число се дели на 7.

Отговор: 13264513.

12. За естественото число n числото

$$N = (\sqrt{n^2 + 1} + n)^3$$

е записано като десетична дроб. Намерете най-малката стойност на n , за която първите три цифри след десетичната запетая на тази десетична дроб са нули.

Отговор: 5.

13. В стая има 12 човека - лъжци и рицари, като има поне един рицар и поне един лъжец. Лъжците винаги лъжат, а рицарите винаги казват истината. Всеки двама в стаята или се познават, или не се познават. Всеки отговорил с ДА или НЕ на въпроса

Познавате ли се?

за всеки от останалите. Какъв най-малък брой отговори ДА може да се получи?

Отговор: 11.

14. Неотрицателните числа a , b и c са такива че $a + b + c = 5$. Да се намери най-голямата стойност на израза

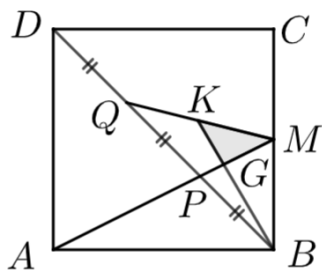
$$(a + 3b + 5c) \left(a + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} \right).$$

Отговор: 45. От

$$(a + 3b + 5c) \left(a + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} \right) - \frac{9}{5}(a + b + c)^2 = -\frac{4}{15}((a - c)^2 + ab + 3b^2 + 5bc) \leq 0$$

следва, че $(a + 3b + 5c) \left(a + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} \right) \leq \frac{9}{5}(a + b + c)^2 = 45$. Тази стойност се достига при $a = c = \frac{5}{2}$ и $b = 0$.

15. На чертежа $ABCD$ е квадрат и точките P и Q разделят диагонала BD на три равни части.



Ако $AP \cap BC = M$, точка K е средата на QM , $BK \cap AM = G$ и лицето на $\triangle KGM$ е 2 cm^2 , колко квадратни сантиметра е лицето на квадрата $ABCD$?

Отговор: 72.